
Sens et algorithmes

Approche historico-critique de l'usage des algorithmes dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire

Bernard Sarrazy

Laboratoire Cultures, éducation, sociétés EA 4140

Equipe DAESL

Didactique et Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Langagiers

Université Victor Segalen Bordeaux 2

3 ter, place de la Victoire

33076 Bordeaux Cedex

Bernard.Sarrazy@sc-educ-bordeaux2.fr

RÉSUMÉ

La plupart de mes travaux sur l'enseignement des mathématiques ont été, depuis une quinzaine d'années, plus au moins liés au contrat didactique et aux effets associés à son indicibilité notamment dans le cadre de la résolution de problèmes. Ces effets de contrat se sont avérés fort variables selon les Arrière-plans culturels des élèves, mais aussi des Arrière-plans didactiques des enseignements qu'ils recevaient. C'est à partir de là que j'ai pris tout à fait au sérieux le point de vue wittgensteinien sur les mathématiques comme phénomène anthropologique. Le sens d'un algorithme n'est pas à rechercher dans l'algorithme lui-même mais dans ses usages circonstanciés ; le maître l'enseigne et attend de l'élève un usage légitime : tel est le contrat tacite qui structure toute relation didactique. C'est sous cet aspect que j'examinerai d'un point vue historico-critique, comment la question du rapport entre le sens et l'algorithme a été envisagée dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

1. Introduction

Le problème est à l'enseignement de l'arithmétique ce qu'est la dictée à l'enseignement de l'orthographe : l'un comme l'autre sont de véritables institutions emblématiques de notre école républicaine ; mais un thermomètre est une arme bien faible pour combattre une maladie ! S'il semble généralement admis que toute notion doit s'élaborer à travers un problème, si comme le stipulent les programmes, les problèmes doivent permettre de « donner du sens aux notions étudiées » et de placer les élèves « en situation d'apprentissage actif » leur permettant de « découvrir les notions comme réponses à des problèmes », tout reste à faire ! Ce sont les conditions effectives de *ce* « faire » qui déterminent : (i) ce que l'élève apprend effectivement (telle notion, telle règle, tel algorithme...), et *en même temps* (ii) une manière de faire des mathématiques, une sorte de « sens pratique » qui s'apprend sans que cela ait été explicitement enseigné : ici c'est moins la connaissance de la règle qui importe que la manière singulièrement renouvelée de se « mettre en règle » à l'occasion de la résolution de problèmes nouveaux. La tension entre ces deux aspects est toujours au centre des préoccupations didactiques comme le rappelle le dernier rapport de l'inspection générale sur l'enseignement des mathématiques (Durpaire, 2006) : l'un renvoyant à l'enseignement des notions et soulignant l'intérêt des exercices et des « problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer » (*Documents d'accompagnement des programmes*, p. 7), l'autre mettant l'accent sur la culture mathématique, la « pratique mathématisante » (selon l'expression de R. Charnay, 2004), c'est-à-dire ce qu'apprennent les élèves et qu'on ne peut pas leur enseigner. Ce dualisme, que nous résumons ici par la tension entre « sens » et « algorithme », aujourd'hui ravivé par les débats à propos du calcul, pourrait être une des raisons possibles au fait que la notion de problème au sein même de l'enseignement des mathématiques apparaisse « confuse et diluée » (J.-L. Durpaire, *id.*, 2006) révélant ainsi une sorte de désarroi didactique des professeurs. L'objet de ce texte est d'éclairer cette question d'un point de vue anthropo-didactique par une mise en perspective historique et critique de l'usage des problèmes dans l'enseignement des mathématiques, afin de mieux comprendre les enjeux didactiques attachés à cette opposition.

2. Cadre d'analyse

Dans quelles circonstances serait-on conduit à distinguer :
« enseignement la multiplication » et « enseignement du sens de la multiplication » ?

Nul besoin d'une lourde enquête pour se rendre compte que les principaux soucis didactiques des professeurs se situent moins dans l'apprentissage des algorithmes que dans les difficultés qu'ont leurs élèves à les utiliser dans des situations nouvelles. Si l'algorithme est un moyen commode, et culturellement reconnu, pour traiter efficacement une classe de problèmes, il s'avère *de facto* insuffisant. Savoir

des mathématiques ne se résume pas à ‘connaître’ des algorithmes, des règles ou des définitions mais à reconnaître leurs occasions d’emploi : la connaissance de la syntaxe n’ouvre pas nécessairement les voies de la sémantique¹. On comprend alors pourquoi la traditionnelle épistémologie mécaniste, relative à la règle et son application, véhiculée par la non moins classique distinction ‘mécanismes / compréhension’, est encore si tenace. Le sens d’un algorithme n’est pas à rechercher dans la règle mais bien dans ses *usages* appropriés et circonstanciés, telle est l’une des leçons que nous a léguées Wittgenstein (1961). On n’échappe donc pas au sens, et toute tentative de domestication apparaît aussi vaine que celle de vouloir mettre le pied sur l’ombre de notre tête. Le paradoxe est bien connu des didacticiens sous le nom du paradoxe de la dévolution associé au contrat tacite qui se noue lors de toute relation didactique : le maître enseigne la règle (d’une manière ou d’une autre...) et, tôt ou tard, attendra et exigera de l’élève qu’il en fasse un usage légitime (attendu), mais ne peut alors dire à l’élève ce qu’il attend de lui : le contrat, comme le rappelle G. Brousseau (in Sarrazy, 2002, 159), « met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu’il fait pour faire produire, par les élèves, les comportements qu’il attend, tend à diminuer l’incertitude de l’élève et par là, à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l’apprentissage de la notion visée : si le maître dit ou signifie ce qu’il veut que l’élève fasse, il ne peut plus l’obtenir que comme exécution d’un ordre et non par l’exercice de ses connaissances et de son jugement (premier paradoxe didactique). Mais l’élève est lui aussi devant une injonction paradoxale : s’il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les solutions et les réponses, il ne les établit pas lui-même et donc, n’engage pas les connaissances (mathématiques) nécessaires et ne peut se les approprier. Vouloir apprendre, impliquerait alors pour lui de refuser le contrat didactique pour prendre en charge le problème de façon autonome. L’apprentissage va donc reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses *ruptures et ses ajustements*. ». On voit bien comment cet usage constitue tout à la fois l’*instrument* de l’enseignement (le professeur n’a pas d’autre possibilité que de montrer l’intérêt de l’algorithme qu’il doit enseigner à travers les diverses situations qui permettent de lui donner corps) ; mais aussi le *but* et *critère* de l’apprentissage (il exige, attend... un usage idoine de la règle *hic et nunc*).

Au-delà même des motifs pédagogiques que les professeurs accordent, explicitement ou non, à leur action (utiliser ou non un manuel de référence, pratiquer ou non le travail de groupes...), au-delà même de leurs différents « cris de guerre » pédagogiques, de leurs styles d’enseignement... les professeurs enseignent la règle et dévolent à leurs élèves la responsabilité de son usage. Quelles sont les conditions de cette dévolution ? Sont-elles suffisantes pour permettre à l’élève de voir ce qu’on

¹ Cette déclaration n’est bien sûr pas spécifique au champ scolaire ; elle est exemplairement illustrée par Thurston (1995) lorsqu’il rapporte les demandes récurrentes de ses collègues mathématiciens souhaitant obtenir des éclaircissements sur tel ou tel aspect d’une démonstration qu’il avait établie : « Ce que les mathématiciens avaient besoin, et ce qu’ils me demandaient, c’était d’apprendre mes façons de penser, et non comment je démontrais la conjecture dans le cas des variétés de Haken ».

ne peut lui montrer (l'usage) ? Tel est selon moi un des problèmes didactiques majeurs. Historiquement, trois grandes catégories de réponses ont été apportées à ce délicat et récurrent problème des rapports de la règle et de son usage².

3. Le modèle magistral

Ce premier modèle est principalement fondé sur l'ostension et la répétition : il apparaît à la fin du 19^e siècle et perdure quasiment jusqu'en 1970. Il correspond *grosso modo* à ce que l'on appelle le plus souvent l'enseignement classique ou traditionnel. Pratique, utilitaire et concret, l'enseignement vise à transmettre au futur citoyen les rudiments du calcul nécessaires à la résolution de problèmes-types directement inspirés par vie sociale ou domestique. Les difficultés rencontrées par les élèves conduisent les professeurs à n'enseigner que des solutions-types qui doivent être mémorisées à défaut de pouvoir les conceptualiser. Vers 1940, des contradictions apparaissent entre une volonté officielle, très utilitaire dans ses finalités et dogmatique dans ses méthodes, des pratiques d'enseignement dans l'ensemble franchement magistrales et les idées impulsées par les mouvements pédagogiques (éducation nouvelle, pédagogie expérimentale...³) qui soulignent l'importance de s'intéresser davantage au « sens du problème » et d'accorder une place centrale à « l'activité de l'élève », amorçant en cela l'importante réforme de 1970. Voici à titre d'illustration ce que Dottrens déclarait : « Si l'on veut que l'enfant soit capable de comprendre des mathématiques [il faut] aller au-delà de formulation vide de sens [...] [il s'agit d'écarter] la résolution d'opérations ou de problèmes au moyen de règles que l'on applique sans savoir ce que l'on fait ou de procédés mnémotechniques sous lesquels disparaît la réalité mathématique. » (Dottrens, 1936, p. 41-42).

4. Le modèle activiste

Une importante rupture dans la définition des finalités éducatives apparaît en 1970. L'enseignement des mathématiques, bien sûr, n'y échappe pas : ses contenus et ses méthodes sont radicalement réformés. Alors que les orientations précédentes plaçaient à l'avant-plan « la *vie courante* et *usuelle* », soulignaient la nécessité d'établir « une relation étroite entre les mathématiques de l'école et les nécessités de la vie » afin d'éviter « de substituer la théorie, même la plus belle, à l'usage » (Instructions du 20/09/1938), les nouveaux textes rompent radicalement avec ces orientations. L'abandon du terme *calcul* au profit de celui de *mathématique* (au singulier, en référence aux mathématiques bourbachiques) marque cette volonté de rupture – certains iront même jusqu'à proposer d'abandonner la pratique du calcul numérique ! Malgré l'échec relatif de la réforme de 70, quelques idées fortes

² Cette première partie emprunte à B. Sarrazy (2003).

³ Sur cet aspect cf. A. Marchive (2007).

s'imposeront : c'est le cas du rôle constructif de l'erreur et de « l'activité » des élèves (Salin, 1976). La réforme de 1970 échouera dans son utopie éducative, mais elle marquera fortement l'enseignement des mathématiques par le passage qu'elle inaugure d'une instruction « utilitaire et concrète » à une « éducation mathématique ». L'idée s'impose de confronter l'élève à des situations, désormais baptisées « situations-problèmes », pour lui permettre d'apprendre des mathématiques. Mais la focalisation sur le problème, sur ses caractéristiques formelles (son organisation linguistique, sa structure logico-mathématique...) a conduit au masquage des raisons didactiques de son usage : tout semble se passer comme si la 'recherche' des élèves, leur tâtonnement, leurs erreurs, les conflits ou les débats suscités par les problèmes, pouvaient engendrer des effets didactiques *sui generis*. La question des conditions de possibilité et des propriétés didactiques de ces situations-problèmes relativement aux connaissances à enseigner restaient à définir⁴.

5. Le modèle métacognitif

A partir des années 80, dans un contexte où le constructivisme piagétien laissait la place à la psychologie cognitive, les difficultés des élèves sont interprétées comme le produit d'une défaillance des procédures de sélection et de traitement des informations. L'enseignement métacognitif s'impose alors comme un moyen de les corriger : il est quasiment officialisé dès 1981 et donnera lieu en 1990 avec la Nouvelle Politique pour l'École, à l'émergence de la notion de *compétence transversale* qui apparaîtra sous la rubrique « traitement de l'information » (MEN, 1991, 36, 52). « L'apprenant » détrône alors « l'élève », et les problèmes se transforment en méta-problèmes : les usages de la règle devraient pouvoir se régler par l'usage de méta-règles. La centration sur l'élève associé au caractère modulaire de cet enseignement constituent l'indice d'une « didactique à orientation psychologique » (cf. la communication de C. Roiné dans ce même colloque). Cette didactique d'orientation psychologique se traduit rapidement dans les programmes par l'instauration d'un enseignement méthodologique (« un apprentissage à la résolution de problème ») qui conduira à une sorte de démathématisation de l'enseignement : pour apprendre des mathématiques, il ne s'agit plus résoudre des problèmes mais d'apprendre à les résoudre. Or, les principes d'un tel enseignement – tel celui de la transversalité des procédures de résolution – ne sont pas aussi fondés qu'ils prétendent l'être (Sarrazy, 1996). Par exemple, les conditions de production de ces difficultés ne sont jamais invoquées ; aussi peut-on s'interroger sur les effets conséquents à la mise en œuvre de telles régulations didactiques : apprendre à résoudre un problème ne saurait être confondu ni avec la résolution elle-

⁴ Tel sera l'objet d'étude des didacticiens des mathématiques dont le cadre d'étude avait été présenté par G. Brousseau à l'occasion du congrès de l'APMEP (*Association des professeurs de mathématiques pour l'enseignement primaire*) de Clermont-Ferrand en 1970, cadre qui posera les premiers jalons de ce qui deviendra la Théorie des situations didactiques en mathématiques (Brousseau, 1998).

même, ni avec l'apprentissage des connaissances nécessaires à sa résolution (cette distinction sera ultérieurement opérée – programmes 2002 et plus particulièrement dans les documents d'accompagnement, p. 7).

6. Discussion

Aucun de ces trois modèles n'est didactiquement satisfaisant : le premier, à défaut de prendre en charge les conditions du maintien des connaissances en jeu, en rabattant implicitement sur les élèves la responsabilité de la recontextualisation des connaissances enseignées, a entretenu l'idéologie charismatique dénoncée jadis par Bourdieu et Passeron dans les *Héritiers*, et a abouti à des propositions insatisfaisantes telles la pédagogie rationnelle ou, plus récemment, la pédagogie de l'explicitation (Lahire, 1997 par exemple) qui conduisent à vider le contrat de son sens (si le maître dit à l'élève ce qu'il attend de lui alors il ne peut plus l'obtenir). Les deux autres modèles, par l'invocation de mécanismes très généraux (les dispositifs et l'activité de l'élève pour le deuxième, les processus psychologiques et méta-cognitifs pour le troisième), ont contribué à la perte du sens didactique du problème (le problème est ici conçu comme une activité mentale générique pas articulée à la spécificité des connaissances qu'il met en jeu) mais aussi à démathématiser les situations en déplaçant le contrat sur des enjeux non mathématiques : centration sur des dispositifs indépendamment de l'activité mathématique elle-même, survalorisation du débat ou du travail de groupe pour le deuxième modèle, invocation de mystérieux processus mentaux et enseignement d'heuristiques qui permettraient d'apprendre sans penser pour le troisième. Pour diverses raisons complexes, dont certaines sont à l'étude (Sarrazy, 2002 ; Roiné, *id.*), nombreux sont les indices de la survivance de ces modèles dans les idéologies professorales aujourd'hui. Songeons à ces leitmotifs que bon nombre d'enseignants arborent aujourd'hui tels des blasons pédagogiques lorsqu'on les invite à décrire leur pratique d'enseignement ou à justifier leurs décisions prises sur le vif : « construire ses connaissances », « élève actif », « ne pas faire de leçons », « ne pas dire et laisser l'élève découvrir »... « transférer », « mobiliser », « instancier », « verbaliser les représentations mentales », etc.

Un certain nombre de travaux réalisés ou en cours dans notre Laboratoire⁵ me laisse croire qu'aujourd'hui la didactique des mathématiques, et plus particulièrement la perspective anthropologique ouverte par la théorie des situations, pourrait contribuer significativement au dépassement de ce double écueil d'une centration sur les savoirs et algorithmes d'un côté, et d'une focalisation sur l'activité mentale de l'élève et sur les dispositifs non justifiés par des motifs didactiques de l'autre. On peut espérer que cette voie permettrait aux professeurs d'envisager des perspectives nouvelles d'enseignement en sollicitant des instruments par lesquels ils pourraient non seulement mieux comprendre les difficultés de certains de leurs

⁵ Je pense notamment à ceux de M.-P. Chopin (2006), sur les formes de régulation du temps didactique – cf. sa communication dans ce même congrès.

élèves, mais surtout de concevoir des situations susceptibles de les réguler. En illustration de ce désarroi didactique et du dessaisissement conséquent, je rapporte ci-après le script du final d'une leçon en CM2 sur le calcul relationnel conduite par un maître « chevronné » (professeur des écoles maître formateur) :

Après la mise en commun de diverses méthodes, le professeur en affiche deux au tableau permettant de résoudre des problèmes additifs. Les deux sont satisfaisantes, mais l'une est ergonomiquement plus efficace et beaucoup plus simple que la seconde. A ma grande surprise, il ne signale pas aux élèves laquelle il est préférable de retenir et clôture sa leçon en disant : « Ceux qui ont eu quelques difficultés, n'auront qu'à me demander la méthode qu'ils préfèrent. Je vous la ferai photocopier. » A l'entretien qui suit la séance, je ne manque pas de l'interroger sur les motifs de sa décision en insistant sur le fait que si les élèves sont en difficulté, c'est précisément du fait qu'il ne possèdent pas les connaissances qui leur permettraient de « choisir » la méthode la plus satisfaisante. Voici sa réponse : « Je ne leur impose pas parce que je pense qu'il vaut mieux qu'ils utilisent une méthode qui leur paraît la plus proche de ce qu'ils auraient fait. Je ne se suis pas dans leur tête pour savoir ce qu'ils pensent. »

Bien sûr ce maître, comme beaucoup de ses collègues, est un maître consciencieux et soucieux de la réussite de tous. Aussi me paraît-il important de mieux comprendre les raisons qui conduisent les maîtres à faire ce qu'ils font et la manière dont ils le font et d'en mesurer les effets, afin de proposer une formation orientée par le souci d'articulation des situations et des dispositifs d'enseignement aux connaissances à enseigner.

Qu'est-ce à dire ?

Considérer en effet que l'algorithme puisse déterminer les décisions de l'élève conduit à justifier le bien-fondé de son enseignement en dévoluant à la nature (aux dons, aux capacités ou habiletés... ou toutes autres catégories mentales) la responsabilité de son usage (autrement dit de son sens), et admettre du même coup que les actions qui ne se conformeraient pas à la législation de la règle procéderaient d'une *interprétation* erronée de ce qu'elle exige (cette conception, classique et courante, est probablement l'une des plus nocives didactiquement, car le professeur n'a pas d'autres alternatives que le recours à de nouvelles règles pour en régler l'usage (ou les soit disantes « interprétations »). Si au contraire, on envisage l'action comme l'effet d'une manière de voir, d'être, de penser... conforme à ce que dit la règle et acquise par diverses adaptations successives à un milieu, alors l'aspect didactique du travail du professeur consiste à s'attacher aux conditions de l'action et aux propriétés des milieux par lesquels l'élève pourra apprendre ce qu'on ne peut lui enseigner directement. On voit bien comment les idéologies pédagogiques (comme celles qui replacent aujourd'hui au devant la scène le rôle de la mémorisation ou des automatismes) et même certains travaux sociologiques ou psychologiques, trop souvent oubliés des aspects didactiques des situations étudiées et plus particulièrement des contraintes attachées à l'ineffabilité du contrat, au-delà même des intérêts particuliers qu'ils représentent, par les conceptions épistémologiques

qu'ils véhiculent, contribuent à maintenir ou à diffuser ce qu'on pourrait appeler, en référence à l'anthropologie bourdieusienne, un *habitus didactique*, sorte de matrice génératrice d'une infinité de comportements professoraux contribuant à structurer, organiser et réguler les dispositifs d'enseignement par lesquels les élèves s'approprient à travers cet ensemble grouillant d'expériences particulières et répétées mais épistémologiquement réglées une manière de faire des mathématiques, une manière de voir et de traiter les problèmes. Comme le dit Bourdieu, « ce qui est appris par corps n'est pas quelque chose que l'on a, comme un savoir que l'on peut tenir devant soi, mais quelque chose que l'on est » (1980, 123).

7. Références bibliographiques

- Bourdieu P., Passeron J.-C. (1980). *La reproduction* : éléments pour une théorie du système d'enseignement, Paris : Les Editions de Minuit. 279 p.
- Bourdieu P., Passeron J.-C. (1985). *Les héritiers* : les étudiants et la culture. Paris : Les Editions de Minuit. 189 p.
- Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage, 1998, 395 p., coll. Recherches en didactique des mathématiques.
- Brousseau G. (1972). Processus de mathématisation, *La mathématique à l'école élémentaire*, Paris : APMEP, 428-457.
- Chopin M.-P. (2006). – Temps d'enseignement et Temps didactique. Intérêt d'une approche didactique de la question du temps dans l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école élémentaire. *Carrefours de l'Education*. n° 21.
- Dottrens R. (1936). *L'enseignement individualisé*. Paris, Neuchâtel : Delachaux & Niestlé, 202 p.
- Durpaire J.-L. (dir.) (2006). *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. Rapport de *Inspection générale de l'éducation nationale*. Paris : Ministère de l'Education Nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. 73 p.
- Lahire B. (1997). Démocratisation, formes scolaires et techniques intellectuelles, Actes du colloque “ *Défendre et Transformer l'École pour tous* ”. Marseille. 3-4-5 octobre 1997, CD-Rom édité par l'IUFM d'Aix-Marseille, 12 p.
- Marchive A. (2007). – La pédagogie à l'épreuve de la didactique : approche historique, recherches empiriques et perspectives théoriques. Presses Universitaires de Bordeaux (A paraître).
- Ministère de l'Éducation nationale de la jeunesse et des sports, direction des écoles : 1991, *Les cycles à l'école primaire*, Hachette, CNDP, Paris.

- Roiné C. (2007). La psychologisation de l'échec scolaire : une affaire d'état. Congrès international AREF 2007 (Actualité de la Recherche en Education et en Formation).
- Salin M.-H. (1976). *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire*, mémoire de DEA, Bordeaux : IREM. 36 p.
- Sarrazy B. (1996). Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. Volume 17, n° 2, Grenoble : La Pensée Sauvage, 135-166.
- Sarrazy B. (2002). Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques : *Contribution à l'étude des inégalités scolaires à l'école élémentaire*. Habilitation à diriger des recherches. Université Victor Segalen Bordeaux 2. 162 p.
- Sarrazy B. (2003). Le problème d'arithmétique dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire de 1887 à 1990. *Carrefours de l'éducation*. n° 15. janv.-juin 2003. 83-101.
- Thurston W. P. (1995). – Preuve et progrès en mathématiques, [Trad. de l'anglais par J. Brette avec une introduction de R. Douady]. *Repères-IREM*. 21. 5-26.
- Wittgenstein L. (1961). *Tractatus logico-philosophicus* (Suivi des *Investigations philosophiques*). [traduit de l'allemand par P. Klossowski], Paris : Gallimard, 364 p., coll. TEL.